Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio 2008

Nombre: ____________________

Carnet: ______________ Sección: _____

MA-1123 DE HONOR— Primer parcial , 2008 —

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.
Debe resolver cuatro, cualesquiera de los 7 ejercicios.

1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

   i) Calcule dim Im $\tilde{A}$ donde $\tilde{A} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ es la función lineal asociada a la matriz A. Encuentre una base de esta imagen.

   ii) Calcule dim $N(\tilde{A})$ y encuentre una base de $N(\tilde{A})$

   iii) Considere el sistema de cuatro ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_4 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

   y explique (usando i y ii) para cuáles vectores $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_4 \end{pmatrix}$ el sistema (*) tiene solución y en estos casos, describa completamente el conjunto de soluciones.

2. Sean S y T dos **subespacios afines** de K^n. Sea $d =$dim S y $e =$dim T, y suponga que $d + e \geq n$.

   a) Demuestre que si $S \cap T \neq \emptyset$, entonces dim $S \cap T \geq d + e - n$

   b) Concluya que si S y T son subespacios afines de dimensión 3 en K^4, entonces si se cortan, dim $S \cap T \geq 2$.

   Muestre un ejemplo donde $S \cap T = \emptyset$

3. Sea una función lineal nilpotente. Suponga que f y N conmutan: $f \circ N = N \circ f$. Demuestre que $f + N$ es un isomorfismo
Sugerencia: Piense en la igualdad de polinomios

$$1 - w^s = (1 - w)(1 + w + \cdots + w^{s-1})$$

y úselo.

4. Sea $K_n[x]$ el conjunto de los polinomios en x de grado menor que n y el polinomio nulo $(n = 2, 3, \dots)$

   a) Demuestre que para cada $\alpha \in K,$ los polinomios $1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, \dots, (x-\alpha)^{n-1}$ forman una base de $K_n[x]$

   b) Dado $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1},$ encontrar las coordenadas de p en la base anterior

5. Considere la matriz de ”Vandermonde”

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots\dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots\dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots\dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

   a) Calcule su determinante

   b) Demuestre que det $V = 0$ si y sólo si dos de los λ coinciden.

6. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad M_4(\mathbb{C})$$

   a) Calcule el polinomio característico de A

   b) Encuentre el polinomio minimal de A

   c) Es A diagonalizable?. De ser así, encuentre una base donde se diagonalice.

7. Sean $P_1 = (a_1, b_1, c_1),\ P_2 = (a_2, b_2, c_2), \dots P_4 = (a_4, b_4, c_4),$ puntos en $\mathbb{R}^4$. Demuestre que los cuatro están en un mismo plano afin si y solo si, el determinante

$$det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$$

   se anula.
   Sugerencia: Considere los vectores

$$\begin{aligned} v_1 &= \overrightarrow{P_1P_4} \\ v_2 &= \overrightarrow{P_2P_4} \\ v_2 &= \overrightarrow{P_3P_4} \end{aligned}$$